

解答

—— 中間試験のおよその点数配分 ——

表の範囲が約 2/3, 裏の範囲が約 1/3.

—— 不定積分とは ——

$$\int f(x)dx$$

=「微分が $f(x)$ となる関数」(+C)

C は任意の定数 (積分定数) である.

+C を付けるかどうかで

一般解 (= 全ての解を表したもの)

特殊解 (= 解の一つ)

問題 1. 不定積分の検算=「答えを微分」を用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) 以下の 4 つの関数

$$-\frac{1}{2x^2}, \log|x|, \log|2x|, \log|x^2|$$

のうち, 不定積分

$$\int \frac{1}{x} dx$$

の特殊解となるものを すべて 挙げよ.

答. $\log|x|$ と $\log|2x|$

(2) 以下の 2 つの関数

$$-\log|\cos x|, \log|\sin x|$$

のうち, 不定積分

$$\int \tan x dx$$

の特殊解となるものはどちらか?

答. $-\log|\cos x|$

—— 定積分とは ——

$$\int_a^b f(x)dx$$

=「 a から b までの $f(x)$ の面積」
定義

$$= \left[\int f(x)dx \right]_a^b$$

基本公式

問題 2. 不定積分の公式

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

を用いて

$$\int_1^2 \log x dx$$

を求めなさい.

答.

$$\int_1^2 \log x dx \stackrel{\text{基本公式}}{=} \left[\int \log x dx \right]_1^2$$
$$= \left[x \log x - x \right]_1^2 = -1 + 2 \log 2$$

問題 3. 1 から 3 までの関数 x^3 の面積を求めなさい (単位は不要).

答.

$$\int_1^3 x^3 dx \stackrel{\text{基本公式}}{=} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 = 20$$

問題 4. 0 から 1 までの関数 e^x の面積を求めなさい (単位は不要).

答.

$$\int_0^1 e^x dx \stackrel{\text{基本公式}}{=} \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$$

— 冪関数の積分 —

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C & (a \neq -1) \\ \log |x| + C & (a = -1) \end{cases}$$

問題 5. 以下の積分を求めなさい.

$$(1) \int dx = x + C$$

$$(2) \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$(3) \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$(4) \int 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 + C$$

$$(5) \int 9(x^2 + 2x^5) dx = 3x^3 + 3x^6 + C$$

$$(6) \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$(7) \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$(8) \int \frac{1}{x^2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

$$(10) \int_{-1}^3 dx = [x]_{-1}^3 = 4$$

$$(11) \int_1^2 (6t + 7) dt = [3t^2 + 7t]_1^2 = 16$$

— 初等関数の積分 —

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

問題 6. 以下の積分を求めなさい.

$$(1) \int 3e^x dx = 3e^x + C$$

$$(2) \int -\cos x dx = -\sin x + C$$

$$(3) \int (2 \sin x + 3) dx = -2 \cos x + 3x + C$$

$$(4) \int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0$$

$$(5) \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

置換積分法

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(g(x))d(g(x)) \\ &= \int f(t)dt \Big|_{t=g(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_a^b f(g(x))d(g(x)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

問題 7. 置換積分法を用いて

$$\int \frac{1}{x(1+\log x)}dx$$

を計算するときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 二つの下線部に当てはまる式をそれぞれ答えなさい:

関数 $1 + \log x$ の微分の関係式は

$$d(1 + \log x) = \underline{\frac{1}{x}} dx$$

である. 従って, 置換積分法より

$$\int \frac{1}{x(1+\log x)}dx = \int \frac{1}{\underline{1+\log x}} d(\underline{1+\log x})$$

と書ける.

(2) (1) の結果を使って不定積分

$$\int \frac{1}{x(1+\log x)}dx$$

の解を求めなさい.

答.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+\log x)}dx &= \int \frac{1}{1+\log x}d(1+\log x) \\ &= \log |1+\log x| + C\end{aligned}$$

問題 8. 置換積分法により以下の積分を求めなさい.

$$\begin{aligned}(1) \int e^{x-1}dx &= \int e^{x-1}d(x-1) \\ &= e^{x-1} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int \frac{1}{3x-7}dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x-7}d(3x-7) \\ &= \frac{1}{3} \log |3x-7| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int (2x+5)^3dx &= \frac{1}{2} \int (2x+5)^3d(2x+5) \\ &= \frac{1}{8}(2x+5)^4 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \int \cos(2x-3)dx &= \frac{1}{2} \int \cos(2x-3)d(2x-3) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x-3) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \int \sin(3x+1)dx &= \frac{1}{3} \int \sin(3x+1)d(3x+1) \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \int \frac{1+\log x}{x}dx &= \int 1+\log x d(1+\log x) \\ &= \frac{1}{2}(1+\log x)^2 + C\end{aligned}$$

$$\int f(x)G'(x)dx \\ = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)G'(x)dx \\ = \left[f(x)G(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

問題 9. 部分積分法を用いて

$$\int x \cos x dx$$

を計算するときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 二つの下線部に当てはまる式をそれぞれ答えなさい:

$G(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ 「 $\cos x$ の原始関数」(言い換えると $G'(x) = \cos x$) と置く. このとき, 不定積分により

$$G(x) = \underline{\hspace{1cm}} \sin x$$

が求まる. また, 関数 x の微分は

$$(x)' = \underline{\hspace{1cm}} 1$$

である.

(2) (1) の結果を使って不定積分

$$\int x \cos x dx$$

の解を求めなさい.

答.

$$\int x \cos x dx \underset{\text{部分積分法}}{=} x \sin x - \int \sin x dx \\ = x \sin x + \cos x + C$$

問題 10. 部分積分法により以下の積分を求めなさい.

$$(1) \int x \sin x dx \\ = -x \cos x + \int \cos x dx \\ = -x \cos x + \sin x + C$$

$$(2) \int x e^x dx \\ = x e^x - \int e^x dx \\ = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

$$(3) \int \log x dx \\ = x \log x - \int dx \\ = x \log x - x + C = x(-1 + \log x) + C$$