

中間試験勉強用プリント

中間試験のおよその点数配分

表の範囲が約 2/3, 裏の範囲が約 1/3.

不定積分とは

$$\int f(x)dx$$

=「微分が $f(x)$ となる関数」(+C)

C は任意の定数 (積分定数) である.

+C を付けるかどうかで

一般解 (= 全ての解を表したもの)

特殊解 (= 解の一つ)

問題 1. 不定積分の検算=「答えを微分」を用いて, 次の問いに答えなさい.

(1) 以下の 4 つの関数

$$-\frac{1}{2x^2}, \log|x|, \log|2x|, \log|x^2|$$

のうち, 不定積分

$$\int \frac{1}{x} dx$$

の特殊解となるものを すべて 挙げよ.

(2) 以下の 2 つの関数

$$-\log|\cos x|, \log|\sin x|$$

のうち, 不定積分

$$\int \tan x dx$$

の特殊解となるものはどちらか?

定積分とは

$$\int_a^b f(x)dx$$

=「 a から b までの $f(x)$ の面積」
定義

$$= \left[\int f(x)dx \right]_a^b$$

基本公式

問題 2. 不定積分の公式

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

を用いて

$$\int_1^2 \log x dx$$

を求めなさい.

問題 3. 1 から 3 までの関数 x^3 の面積を求めなさい (単位は不要).

問題 4. 0 から 1 までの関数 e^x の面積を求めなさい (単位は不要).

冪関数の積分

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C & (a \neq -1) \\ \log|x| + C & (a = -1) \end{cases}$$

問題 5. 以下の積分を求めなさい.

(1) $\int dx$

(2) $\int x dx$

(3) $\int t^2 dt$

(4) $\int 3x^3 dx$

(5) $\int 9(x^2 + 2x^5) dx$

(6) $\int \sqrt{x} dx$

(7) $\int \frac{1}{x} dx$

(8) $\int \frac{1}{x^2} dx$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

(10) $\int_{-1}^3 dx$

(11) $\int_1^2 (6t + 7) dt$

初等関数の積分

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

問題 6. 以下の積分を求めなさい.

(1) $\int 3e^x dx$

(2) $\int -\cos x dx$

(3) $\int (2 \sin x + 3) dx$

(4) $\int_0^\pi \cos x dx$

(5) $\int_0^\pi \sin x dx$

置換積分法

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x))$$

$$= \int f(t)dt \Big|_{t=g(x)}$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))d(g(x))$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

問題 7. 置換積分法を用いて

$$\int \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$$

を計算するときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 二つの下線部に当てはまる式をそれぞれ答えなさい:

関数 $1 + \log x$ の微分の関係式は

$$d(1 + \log x) = \underline{\hspace{2cm}} dx$$

である. 従って, 置換積分法より

$$\int \frac{1}{x(1 + \log x)} dx = \int \underline{\hspace{2cm}} d(1 + \log x)$$

と書ける.

(2) (1) の結果を使って不定積分

$$\int \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$$

の解を求めなさい.

問題 8. 置換積分法により以下の積分を求めなさい.

(1) $\int e^{x-1} dx$

(2) $\int \frac{1}{3x-7} dx$

(3) $\int (2x+5)^3 dx$

(4) $\int \cos(2x-3) dx$

(5) $\int \sin(3x+1) dx$

(6) $\int \frac{1 + \log x}{x} dx$

$$\int f(x)G'(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)G'(x)dx = \left[f(x)G(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

問題 9. 部分積分法を用いて

$$\int x \cos x dx$$

を計算するときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 二つの下線部に当てはまる式をそれぞれ答えなさい:

$G(x) =$ 「 $\cos x$ の原始関数」 (言い換えると $G'(x) = \cos x$) と置く. このとき, 不定積分により

$$G(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

が求まる. また, 関数 x の微分は

$$(x)' = \underline{\hspace{2cm}}$$

である.

(2) (1) の結果を使って不定積分

$$\int x \cos x dx$$

の解を求めなさい.

問題 10. 部分積分法により以下の積分を求めなさい.

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int x e^x dx$

(3) $\int \log x dx$