解答 (期末試験勉強用問題集, 工科系数学 III)

1 (三角関数の基本的な積分).

a. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

b. $\int 3\cos x dx = 3\sin x + C$

c. $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

d. $\int -2\cos\frac{1}{3}x dx = -6\sin\frac{1}{3}x + C$

e. $\int 5\sin(-x+3)dx = 5\cos(-x+3) + C$

f. $\int \frac{1}{2}\cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{6}\sin(3x+2) + C$

三角関数の積分公式 (p116)

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

また定数 $a \neq 0$, b について

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$
$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

2 (変形して解く三角関数の積分). 必要あれば積和公式を用いて積分しなさい.

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$$
$$\sin A\sin B = -\frac{1}{2}(\cos(A+B) - \cos(A-B))$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

a. $\int \sin 5x\sin 3x dx$

$\underset{\text{積和公式}}{=} -\frac{1}{2}\int(\cos 8x - \cos 2x)dx$

$\underset{\text{積分計算}}{=} -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

b. $\int \sin 3x\cos 2x dx$

$\underset{\text{積和公式}}{=} \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)dx$

$\underset{\text{積分計算}}{=} -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$

c. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx \underset{\text{積和公式}}{=} \frac{1}{2}\int(\cos x + \cos 0)dx$

$= \frac{1}{2}\int(\cos x + 1)dx \underset{\text{積分計算}}{=} \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x + C$

d. $\int \sin^2(x+1)dx$

$\underset{\text{積和公式}}{=} -\frac{1}{2}\int(\cos(2x+2) - \cos 0)dx$

$= \frac{1}{2}\int(1 - \cos(2x+2))dx$

$\underset{\text{積分計算}}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x+2) + C$

e. $\int \cos(3x-2)\cos(2x+3)dx$

$\underset{\text{積和公式}}{=} \frac{1}{2}\int(\cos(5x+1) + \cos(x-5))dx$

$\underset{\text{積分計算}}{=} \frac{1}{10}\sin(5x+1) + \frac{1}{2}\sin(x-5) + C$

f. $\int \sin(x+1)\cos(3-2x)dx$

$\underset{\text{積和公式}}{=} \frac{1}{2}\int(\sin(-x+4) + \sin(3x-2))dx$

$\underset{\text{積分計算}}{=} \frac{1}{2}\cos(-x+4) - \frac{1}{6}\cos(3x-2) + C$

3 (置換積分で解く三角関数の積分).

a. $\int \sin x \cos^2 x dx = -\int \cos^2 x \cdot (\cos x)' dx$

$\underset{t=\cos x}{=} -\int t^2 dt = -\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

b. $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x \cdot (\sin x)' dx$

$\underset{t=\sin x}{=} \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

c. $\int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x dx$

$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot (\sin x)' dx$

$\underset{t=\sin x}{=} \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

d. $\int \frac{1}{\tan^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\tan^4 x} \cdot (\tan x)' dx$

$\underset{t=\tan x}{=} \int \frac{1}{t^4} dt = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3\tan^3 x} + C$

4 (変形してから置換積分で解く三角関数の積分).

$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$

$\underset{\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ \text{より}}{=} \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x dx$

$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \cdot (\cos x)' dx$

$\underset{t=\cos x}{=} -\int (1 - t^2) t^2 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C$

$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

置換積分

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(g(x)) d(g(x))$$

$$\underset{t=g(x)\ \text{と置いて}}{=} \int f(t) dt$$

5 (有理関数の基本的な積分).

a. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

b. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

c. $\int \frac{1}{x-1} dx = \log|x-1| + C$

d. $\int \frac{1}{x+3} dx = \log|x+3| + C$

e. $\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{x-2} + C$

f. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

6. 公式

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

を用いて解きなさい.

a. $\int \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$

b. $\int \frac{1}{5+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

c. $\int \frac{1}{4+(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C$

d. $\int \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \arctan(x-2) + C$

冪関数の積分公式

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C & (a \neq -1) \\ \log|x| + C & (a = -1) \end{cases}$$

7 (置換積分で解く有理関数の積分).

a. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{x^2+4}\cdot(x^2+4)'dx$
$\displaystyle\underset{t=x^2+4}{=} \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log(x^2+4) + C$

b. $\displaystyle\int \frac{2(x-2)}{1+(x-2)^2}dx$
$\displaystyle= \int \frac{1}{1+(x-2)^2}\cdot(1+(x-2)^2)'dx$
$\displaystyle\underset{t=1+(x-2)^2}{=} \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$
$= \log(1+(x-2)^2) + C$

8 (変形して解く有理関数の積分).

a. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x+3}{x^2+1}dx$
$\displaystyle\underset{\text{分子を分母で割る}}{=} \int \frac{3(x^2+1)-2x}{x^2+1}dx$
$\displaystyle\underset{\text{分数を分けて}}{=} 3\int dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx$
$\displaystyle\underset{\text{積分計算}}{=} 3x - \log(x^2+1) + C$

b. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+4}dx$
$\displaystyle\underset{\text{分数を分けて}}{=} \int \frac{2x}{x^2+4}dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx$
$\displaystyle\underset{\text{積分計算}}{=} \log(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

c. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$
$\displaystyle\underset{\text{平方完成}}{=} \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$
$\displaystyle\underset{\text{積分計算}}{=} \arctan(x+1) + C$

d. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-2x+4}dx$
$\displaystyle\underset{\text{平方完成}}{=} \int \frac{2x+3}{(x-1)^2+3}dx$
$\displaystyle\underset{\text{分子を }(x-1)\text{ で割って}}{=} \int \frac{2(x-1)+5}{(x-1)^2+3}dx$
$\displaystyle\underset{\text{分数を分けて}}{=} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+3}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2+3}dx$
$\displaystyle\underset{\text{積分計算}}{=} \log((x-1)^2+3) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$

9 (部分分数分解で解く有理関数の積分).

a. $\displaystyle\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$
を満たす a, b を求め，さらに，
$\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x-2)}dx$
を計算しなさい．

答．まず，部分分数分解を求める．等式において分母を払えば

$$1 = (x-2)a + (x-3)b$$

$x=3$ として $a=1$, $x=2$ として $b=-1$ が求まる．次に，この結果を用いて，積分を計算すると，

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-2)}dx$$
$$\underset{\text{部分分数分解}}{=} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$\underset{\text{積分計算}}{=} \log|x-3| - \log|x-2| + C$$
$$\underset{\text{変形}}{=} \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

b. $\displaystyle\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}$
$\displaystyle= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
を満たす a, b, c を求め，さらに，
$\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}dx$
を計算しなさい．

答．まず，部分分数分解を求める．等式において分母を払えば

$$x-1 = (x+1)^2a + (x-2)(x+1)b + (x-2)c$$

$x=2$ として $a=\dfrac{1}{9}$, $x=-1$ として $c=\dfrac{2}{3}$ が求まる．さらに $x=1$ とすれば

$$0 = 4a - 2b - c$$

なので，$b=-\dfrac{1}{9}$ 次に，この結果を用いて，積分を計算すると，

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}dx$$
$$\underset{\text{部分分数分解}}{=} \int \left(\frac{1}{9(x-2)} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2}\right)dx$$
$$\underset{\text{積分計算}}{=} \frac{1}{9}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3(x+1)} + C$$

10 (公式を使って解く無理関数の積分)．公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}|+C$$

を用いて以下を求めなさい．

a. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+3}|+C$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}dx = \log|x+\sqrt{x^2-5}|+C$

c. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx \underset{\text{平方完成}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-2}}dx$
$= \log|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-2}|+C$
$\underset{\text{変形}}{=} \log|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C$

11 (高次導関数)．

a. $(x^3-2x^2+x)'' = (3x^2-4x+1)'$
$= 6x-4$

b. $(x^2\log x)'' = (2x\log x+x)'$
$= (2\log x+2)+1 = 2\log x+3$

c. $(\sin 2x)^{(3)} = (2\cos 2x)^{(2)}$
$= (-4\sin 2x)^{(1)} = -8\cos 2x$

高次導関数

$f^{(n)}(x) =$「関数 $f(x)$ を n 回微分」

12 (マクローリン展開)．マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を用いて以下を解きなさい．

a. e^x のマクローリン展開を求めなさい．
答．$f(x)=e^x$ の n 回微分は

$$f'(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$$

であるから，$f'(0)=e^0=1$ である．従って，マクローリン展開は

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

b. $\sqrt{1+x}$ を 2 次式で近似しなさい．
答．$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ の $1,2$ 回微分は

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)-\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)-\frac{3}{2}$$

であるから，

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=\frac{1}{2} \qquad f''(0)=-\frac{1}{4}$$

である．従って，$\sqrt{1+x}$ の 2 次式での近似は，マクローリン展開の公式から

$$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

c. $\cos 3x$ を 2 次式で近似しなさい．
答．$f(x)=\cos 3x$ の $1,2$ 回微分は

$$f'(x) = -3\sin 3x \qquad f''(x) = -9\cos 3x$$

であるから，

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=0 \qquad f''(0)=-9$$

である．従って，$\cos 3x$ の 2 次式での近似は，マクローリン展開の公式から

$$\cos 3x \fallingdotseq 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{9}{2!}x^2 = 1 - \frac{9}{2}x^2$$