

期末試験勉強用問題集 (工科系数学 III)

1 (三角関数の基本的な積分).

a. $\int \sin x dx =$

b. $\int 3 \cos x dx =$

c. $\int \sin 5x dx =$

d. $\int -2 \cos \frac{1}{3}x dx =$

e. $\int 5 \sin(-x + 3) dx =$

f. $\int \frac{1}{2} \cos(3x + 2) dx =$

三角関数の積分公式 (p116)

$$\int \sin x dx =$$

$$\int \cos x dx =$$

また定数 $a \neq 0, b$ について

$$\int \sin(ax + b) dx =$$

$$\int \cos(ax + b) dx =$$

2 (変形して解く三角関数の積分). 必要あれば積和公式を用いて積分しなさい.

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A + B) + \sin(A - B))$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}(\cos(A + B) - \cos(A - B))$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A + B) + \cos(A - B))$$

a. $\int \sin 5x \sin 3x dx =$

b. $\int \sin 3x \cos 2x dx =$

c. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx =$

d. $\int \sin^2(x + 1) dx =$

e. $\int \cos(3x - 2) \cos(2x + 3) dx =$

f. $\int \sin(x + 1) \cos(3 - 2x) dx =$

3 (置換積分で解く三角関数の積分).

a. $\int \sin x \cos^2 x dx =$

b. $\int \sin^3 x \cos x dx =$

c. $\int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x dx =$

d. $\int \frac{1}{\tan^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

4 (変形してから置換積分で解く三角関数の積分).

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx =$$

置換積分

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(g(x))d(g(x)) \\ &\underset{t=g(x) \text{ と置いて}}{=} \int f(t)dt \end{aligned}$$

5 (有理関数の基本的な積分).

a. $\int \frac{1}{x} dx =$

b. $\int \frac{1}{x^2} dx =$

c. $\int \frac{1}{x-1} dx =$

d. $\int \frac{1}{x+3} dx =$

e. $\int \frac{1}{(x-2)^2} dx =$

f. $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

6. 公式

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

を用いて解きなさい.

a. $\int \frac{1}{9+x^2} dx =$

b. $\int \frac{1}{5+x^2} dx =$

c. $\int \frac{1}{4+(x-1)^2} dx =$

d. $\int \frac{1}{1+(x-2)^2} dx =$

幂関数の積分公式

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C & (a \neq -1) \\ \log |x| + C & (a = -1) \end{cases}$$

7 (置換積分で解く有理関数の積分).

a. $\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx =$

b. $\int \frac{2(x-2)}{1+(x-2)^2} dx =$

8 (変形して解く有理関数の積分).

a. $\int \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} dx =$

b. $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 4} dx =$

c. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx =$

d. $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 4} dx =$

9 (部分分数分解で解く有理関数の積分).

a. $\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$
を満たす a, b を求め, さらに,

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-2)} dx$$

を計算しなさい.

b. $\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2}$
 $= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

を満たす a, b, c を求め, さらに,

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2} dx$$

を計算しなさい.

10 (公式を使って解く無理関数の積分). 公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 + A}| + C$$

を用いて以下を求めなさい.

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx =$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5}} dx =$

c. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} dx =$

11 (高次導関数).

a. $(x^3 - 2x^2 + x)'' =$

b. $(x^2 \log x)'' =$

c. $(\sin 2x)^{(3)} =$

12 (マクローリン展開). マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を用いて以下を解きなさい.

a. e^x のマクローリン展開を求めなさい.

b. $\sqrt{1+x}$ を 2 次式で近似しなさい.

c. $\cos 3x$ を 2 次式で近似しなさい.

—— 高次導関数 ——

$f^{(n)}(x)$ = 「関数 $f(x)$ を n 回微分」