

第 7 回 小テスト (微分 II)

学生番号 _____

氏名 _____

1. 次の関数の極値を求めなさい。

$$(1) f(x) = x^3 - 9x + 1$$

答.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}),$$

$$f''(x) = 6x$$

であるから,

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

であり, $x = -\sqrt{3}$ のときは $f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$ より極大 $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} + 1$ となり, $x = \sqrt{3}$ のときは $f''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$ より極小 $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} + 1$ となる.

$$(2) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

答. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ なので,

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

であるから,

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ より極大 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$ となり, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ より極小 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$ となる.

2. 次の関数の凸凹を調べなさい。

$$(1) y = -3x^2$$

答.

$$y'' = (-3x^2)'' = (-6x)' = -6 < 0$$

より, 関数は上に凸.

$$(2) y = \sqrt{x}$$

答.

$$y'' = (\sqrt{x})'' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$$

より, 関数は上に凸.